Enseñanza De Ecuaciones Cuadráticas Mediante La Resolución De Problemas Con Estudiantes De Bachillerato

Saúl Elizarrarás Baena
Escuela Normal Superior de México

Resumen
Este estudio de tipo cualitativo (Martínez, 2008) forma parte de una investigación más amplia que se realizó con un grupo principal estaba compuesto de un aproximado de cuarenta y ocho estudiantes, a quienes se les proporcionó un cuestionario con ocho reactivos relacionados con problemas matemáticos tomados del Libro para el Maestro de Secundaria publicado por la Secretaría de Educación Pública (2001), los cuales se resuelven mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y de cuya relación, se obtiene una ecuación cuadrática. Cabe señalar que hubo ausencia de conocimientos previos y en el mejor de los casos, los estudiantes manifestaban conocimientos frágiles u olvidados (Perkins, 1997). Así, la enseñanza formuló preguntas guía (Eggen & Kauchak, 2005) que permitieran a los estudiantes dar sentido al planteamiento algebraico y desarrollar los procedimientos algebraicos correspondientes; no obstante, el docente no pudo suplir su función de dador por la de mediador del conocimiento matemático.

Palabras clave: Enseñanza, comprensión, resolución problemas, ecuación cuadrática.

Introducción

Actualmente, la función docente se enmarca en un conjunto de competencias propuestas a nivel Federal por la Secretaría de Educación Pública (2008b). En este sentido, al reafirmar el tema de ecuaciones cuadráticas (cuyo aprendizaje se debió haber dado desde tercero de secundaria) mediante la resolución de problemas referidos a situaciones y contextos diversos, se consideró pertinente caracterizar el desarrollo de algunas de las competencias genéricas tales como: se expresa y se comunica, piensa crítica y reflexivamente, aprende de forma autónoma y trabaja de forma colaborativa que señala la Secretaría de Educación Pública (2008a); lo anterior, considerado conocimiento previo para la resolución de problemas de optimización sin cálculo como tema inicial de la materia de Cálculo Diferencial del programa de estudios vigente para el Bachillerato General dependiente de la Secretaría de Educación del Gobierno del Estado de México (2008).

A modo de diagnóstico, en las reuniones de Trabajo Colegiado, las orientadoras de tercer grado reportaron que el 59% de los estudiantes carecían del nivel de desarrollo de habilidades matemáticas y el resto, no alcanzaban niveles de excelencia, lo cual fue ratificado por profesoras del campo disciplinar de Ciencias Naturales y Experimentales quienes comentaron que no dominaban las leyes de los signos ni despejes básicos; por lo tanto, se esperaba incidir de forma inmediata, gradual y sistemática en el desarrollo de algunas de las competencias disciplinares extendidas para estudiantes de bachillerato general que propone la Secretaría de Educación Pública (2009):

> Las competencias disciplinares extendidas para este campo del conocimiento corresponden a las competencias disciplinares básicas previstas en el artículo 7 del Acuerdo 444, y son las siguientes:
>
> 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. (p. 4)

En la parte central del documento, se muestra el análisis de algunos de los resultados obtenidos con la instrumentación de sesiones de enseñanza que se llevaron a cabo bajo las condiciones y situaciones que de forma regular suelen presentarse en el aula con grupos numerosos de estudiantes que deben ser atendidos por un profesor. El objetivo de este estudio fue identificar dificultades para la enseñanza y la comprensión de estudiantes de bachillerato al resolver problemas sobre ecuaciones cuadráticas.

Investigaciones previas

A continuación, se presentan dos aportaciones cuyas secuencias didácticas fueron desarrolladas por parte de los propios investigadores, cuyo método tiene estrecha relación con la interpretación de la intervención de la enseñanza que aquí se reporta.

Posadas (2013) desarrolló en una unidad didáctica los tipos de ecuaciones de segundo grado (completas e incompletas), así como la resolución de problemas contextualizados mediante ecuaciones de segundo grado; lo anterior requirió de siete sesiones que incluyeron explicaciones, ejercicios, prueba de evaluación formativa sobre la comprensión y un examen sobre los contenidos del bloque de álgebra, incluyendo las ecuaciones cuadráticas. La autora refiere que la reconstrucción de un significado de referencia didáctico-matemático amplio permite la introducción progresiva de propuestas de cambio fundamentadas, también reconoce condicionamientos difíciles de superar pero objetos de conciencia: tiempo asignado, material de aprendizaje (libro de texto), así como una concepción implícita de entender la matemática y su enseñanza.

Por su parte, Cruz (2008) reconoce la problemática de utilizar la factorización como método general al resolver ecuaciones cuadráticas, por lo que propone una forma de encontrar dos números de los cuales se conoce su suma y su multiplicación desde un entorno numérico y geométrico, este conocimiento es utilizado para factorizar cualquier trinomio cuadrado, lo cual le permitió superar el discurso escolar del ensayo y error, así como significar y resignificar la solución de ecuaciones cuadráticas con cualquier tipo de raíz en diferentes contextos: numérico, geométrico, algebraico y su aplicación.

Referentes teóricos, metodológicos y de organización

Como el tema de ecuaciones cuadráticas era un antecedente para estudiantes de bachillerato de quinto semestre, se esperaba que propusieran un procedimiento más o menos formal para resolver cada uno de los problemas y que comunicaran la información matemática implícita, posteriormente que socializaran sus estrategias de resolución con la finalidad de que pudieran argumentar sus procedimientos (Duval, 1999). No obstante, en función de la experiencia docente, también se tenía previsto que pudieran transitar de un procedimiento informal hacia la forma convencional que se utiliza para resolver este tipo de problemas o por el contrario, que el desempeño de los estudiantes pudiera caracterizarse por los conocimientos frágiles, olvidados, inertes, ingenuos y rituales (Perkins, 1997).

En este estudio de tipo cualitativo (Martínez, 2008), se asumió como enfoque metodológico a la Etnografía Educativa, cuyo método principal fue la observación participante (Woods, 1998), es decir, el investigador realizaba funciones de docencia. Se diseñó un cuestionario de exploración compuesto por ocho reactivos de pregunta abierta, cada uno referido a situaciones y contextos diversos, cuya resolución formal implicaba el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y derivado de estas, se formulaba una ecuación cuadrática. Los estudiantes contestaron el instrumento en equipos de tres personas en un tiempo aproximado de dos sesiones de cincuenta minutos cada una, cuya finalidad de que pudieran movilizar sus conocimientos previos en forma conjunta. Posteriormente, se les pidió a algunos de los equipos que presentaran ante el grupo su procedimiento y al no obtener la participación idónea de su parte, la enseñanza intervino para guiar la resolución del problema mediante el planteamiento de preguntas guía (Heggen & Kauchak, 2005).

Planificación e intervención de la enseñanza

Las situaciones planteadas en el cuestionario refirieron a contextos diversos, conocimientos y habilidades algebraicas e incluso, de tipo geométrico. El docente pidió a los estudiantes que se reunieran en equipos de tres personas para que resolvieran los problemas del cuestionario, pero como no pudieron plantear el sistema de ecuaciones correspondiente y sólo en algunos casos pudieron aportar procedimientos basados en el ensayo y el error (ver Imagen 1).

a) Varios amigos ganan 90 canicas, pero deciden compartirlas con un amigo más, por lo que a cada uno le tocan 3 canicas menos. ¿Cuántos amigos eran?

PROCEDIMIENTO UTILIZADO:

90/9 = 10   90/10 = 9

....

90 / 5 = 18   90/6 = 15

Imagen 1. Ejemplo de respuesta mediante ensayo y error.

Posteriormente, se les formularon preguntas que les permitieran dar resolución a cada uno de los problemas, lo cual ocasionó que surgieran peticiones para que primero se les explicara de forma directa el procedimiento y sólo así, ellos estarían en condiciones de resolver los demás. En la imagen 2, se muestra el primero de los problemas y posteriormente, su resolución respectiva.

c) Un terreno rectangular tiene un perímetro de 88 m y un área de 475 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

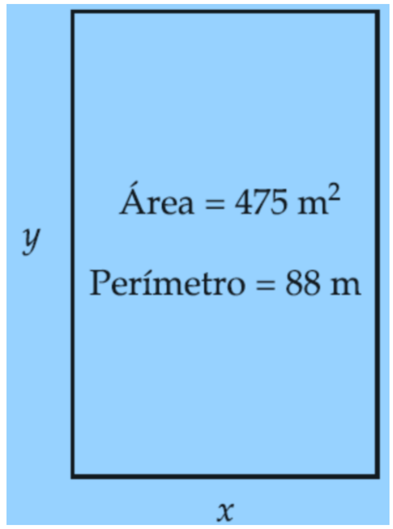

Imagen 2. Ejemplo de problema planteado en el cuestionario.

En los pasajes siguientes, se muestra como el profesor (P) guió a los estudiantes (E_n) para la resolución grupal del problema.

P: ¿Qué denotan las variables x, y?

E_2: “x” es la base del rectángulo, “y”: la altura.

P: ¿Cómo expresan el área del rectángulo?

E_2: Área es igual a base por altura.

P: ¿Y en términos de las variables y del valor del área conocida?

E_{20}: $(x)(y) = 475$

P: Bien. Ahora, ¿cómo expresamos el perímetro?

E_{20}: $2x + 2y = 88$

P: Primero, vamos a resolverlo en forma aritmética. ¿Cuáles podrían ser los valores numéricos de “x” y de “y” que cumplan con la condición de que el área es de 475 metros cuadrados y el perímetro de 88 metros? [A pesar de que se dio un tiempo de aproximadamente cinco minutos para que los alumnos pudieran movilizar sus conocimientos previos, no hubo respuesta de parte de ellos].

E_6: ¡No entiendo!

P: A ver, para que me entiendan, vamos a organizar los datos en una tabla. Ahora bien, si x = 1, ¿cuánto debe valer “y” para que el área sea de 475 metros cuadrados?

E_{22}: 475

P: ¿Cómo obtenemos el perímetro? ¿Cuál es su valor numérico?

E_{39}: Tenemos que multiplicar por dos tanto a 1 como a 475 y después, sumarlo?

P: Por favor, pasa a desarrollarlo. Mientras su compañero hace el cálculo correspondiente en el pizarrón, ¿me podrían decir cuál es el valor numérico que debe satisfacer el perímetro?

E_{22}: Debe ser igual a 88.

P: ¿Por qué no coincide? [Ningún alumno responde]. A ver, si ahora x = 2, ¿cuánto debe valer “y” para que el área sea 475?

E_2: La mitad.

P: La mitad, bien. Pasa al pizarrón a calcular el perímetro. [En el pizarrón se anotó la tabla 1].

Tabla 1. Resolución aritmética del problema.

x	y	A= (x)(y)	P = 2x + 2y
1	475	A = (1) (475) = 475	P = (2)(1) + (2)(475) = 2 + 950 = 952
2	237.5	A = (2)(237.5) = 475	P = (2)(2) + (2)(237.5) = 4 + 475 = 479

P: ¿Qué está pasando con el perímetro?

E_7: Bajó.

P: Disminuyó. ¿Qué ocurrirá si el valor de “x” aumenta a tres?

E_7: Va a bajar más.

P: A ver háganlo y de ser así, continúen con otros valores. [Se hace una pausa]. ¿Cuál es el valor numérico que debemos obtener para el perímetro?

E_{11}: Ochenta y ocho.

P: Ochenta y ocho, ¿verdad? [Transcurrieron aproximadamente diez minutos].

E_{20}: Ya terminamos profesor.

P: Nos pueden decir, ¿cuánto debe valer la base y la altura para que el área sea de 475 metros cuadrados y el perímetro de 88 metros?

E_{20}: Diecinueve y veinticinco.

P: Bien. Cerciórense todos, de estos resultados. [Transcurrió un aproximado de cinco minutos]. Bueno, ahora vamos a resolverlo algebraicamente. Hasta ahora, lo que hemos hecho lo vamos a llamar como planteamiento del problema. Vamos a llamar ecuación uno al área del rectángulo, sabemos que es 475, ¿cómo la vamos a expresar?

E_2: $475 = (x)(y)$

P: ¿Y el perímetro cómo lo vamos a expresar?

E_2: $88 = 2x + 2y$

P: Bien, está será nuestra ecuación dos. ¿Qué debemos hacer para resolver este sistema de ecuaciones? [Ningún alumno responde]. Recuerden que cuando tenemos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, tenemos que despejar una de las variables; en este caso, lo haremos con la variable "y" de la ecuación dos. ¿Cómo lo haríamos?

E_{39}: Quedaría ochenta y ocho menos dos "ye" y luego, lo dividiríamos entre dos.

P: Bien. [Escribe en el pizarrón $y = \frac{88-2x}{2}$]. Ahora, a esta expresión la llamaremos tres; ¿podremos simplificarla para facilitar el procedimiento? [Ningún alumno contesta]. Vean, si dividimos cada término entre dos, ¿cómo quedaría?

E_{39}: y = 44 – x

P: ¿Cómo puedo relacionarlo con la ecuación uno? [Ningún alumno contesta]. Lo que tenemos que hacer es sustituir la expresión tres en la uno, es decir, en lugar de escribir "y", pondré lo que vale [Escribe en el pizarrón 475 = (x)(44 – x)]. Ahora, ¿Cómo creen que debo calcular "ye"? [Nuevamente, nadie contesta]. Bueno, fíjense: primero, voy a multiplicar a "x" por cada término del binomio… [En el pizarrón, quedó escrito: $475 = 44x - x^2$]; después, pasaré a ambos términos del lado izquierdo de la igualdad [Escribió: $x^2 - 44x + 475 = 0$]; antes de continuar, quiero que me digan, ¿para qué me va a servir esta expresión algebraica? [Hace una pausa] ¿Cómo puedo calcular el valor de “x”? [No hubo respuesta]; bueno, lo que obtuvimos fue una ecuación cuadrática y para resolverla tenemos que factorizarla, abrimos dos paréntesis y... [Interrumpe un alumno].

E_{22}: Se calcula la raíz cuadrada de “x” al cuadrado.

P: Bien y luego, ¿qué hago?

E_{22}: Se anota dentro de los dos paréntesis. [Al mismo tiempo, el profesor anotó en el pizarrón: (x)(x) = 0]

P: ¿Y después?

E_{22}: No me acuerdo.

P: Bueno, tenemos que buscar dos números que sumados nos dé el coeficiente del término lineal y multiplicados el coeficiente del término independiente, con todo y sus signos para ambos casos. [Escribe en el pizarron: ( )( ) = __ ( ) + ( ) = _]. ¿Cuál número debo escribir aquí [señala el producto] y cuál acá [señala la suma]?

E_{11}: En la multiplicación cuatrocientos setenta y cinco y en la suma, cuarenta y cuatro.

P: ¿Sin el signo?

E_{11}: Negativo.

P: Negativo cuarenta y cuatro. Entonces, ¿cuáles son esos números? [Nadie contesta]. ¿Cuáles valores habíamos dicho que se obtenían para la base y la altura del rectángulo?

E_{20}: Diecinueve y veinticinco.

P: ¿Esos números podrían ser los que andamos buscando? [No hubo respuesta en lo inmediato y los alumnos parecían ya estar desesperados]. A ver, si lo sustituyo en los paréntesis, díganme si se cumple o no. [Escribe en el pizarrón:

$$(19)(25) = 475, \quad (19) + (25) = -44]$$

E_{22}: En la multiplicación sí, pero en la suma no.

P: Entonces, ¿qué debo hacer?

E_{39}: Poner signo negativo a los dos. [El profesor agrega el signo negativo y quedó como sigue: $(-19)(-25) = 475$, $(-19) + (-25) = -44$]

P: Ahora, ¿Ya se cumple?

E_t: Sí. [Contestaron varios alumnos (as) simultáneamente]

P: Bien. Finalmente, despejamos cada uno de los factores para obtener de forma explícita cada uno de los valores de "x" [Escribe en el pizarrón:

$$\frac{(x-19)(x-25)}{(x-19)} = \frac{0}{(x-19)}$$ Propiedad inversa multiplicativa

$$(x_1 - 25) = 0$$ Propiedad cancelativa

$$x_1 - 25 + 25 = 25$$ Propiedad aditiva

$$x_1 = 25$$ Propiedad cancelativa]

E_{30}: No entendí.

P: Ah, lo que pasa es que tenemos que dividir entre uno de los factores para que así, pueda despejar la “x” del otro factor, a esto se le conoce como propiedad del inverso multiplicativo y sólo así, se mantiene la igualdad; luego aplicamos la propiedad cancelativa y como del otro lado, tenemos cero entre el factor, el resultado sigue siendo cero. Enseguida, despejamos “x” y lo que se obtiene es positivo veinticinco; aquí apliqué la propiedad aditiva.

P: Lo mismo deben hacer para el otro factor.

E_{30}: Ya entendí.

P: Copien lo que está en el pizarrón y hagan lo mismo con el otro factor. De tarea van a resolver los demás problemas.

E_6: ¿De qué manera?

P: De las dos, tanto en forma aritmética como algebraica.

E_6: Esta muy difícil, mejor sólo de la primera.

E_{11}: Sí, sólo de la primera.

P: Deben hacerlo de las dos formas para que vean cuál procedimiento es más rápido.

En la imagen 3, se muestra otro de los problemas que fue resuelto mediante la guía del profesor, ya que los estudiantes tampoco lograron o no quisieron interpretar los datos proporcionados conforme al planteamiento algebraico correspondiente.

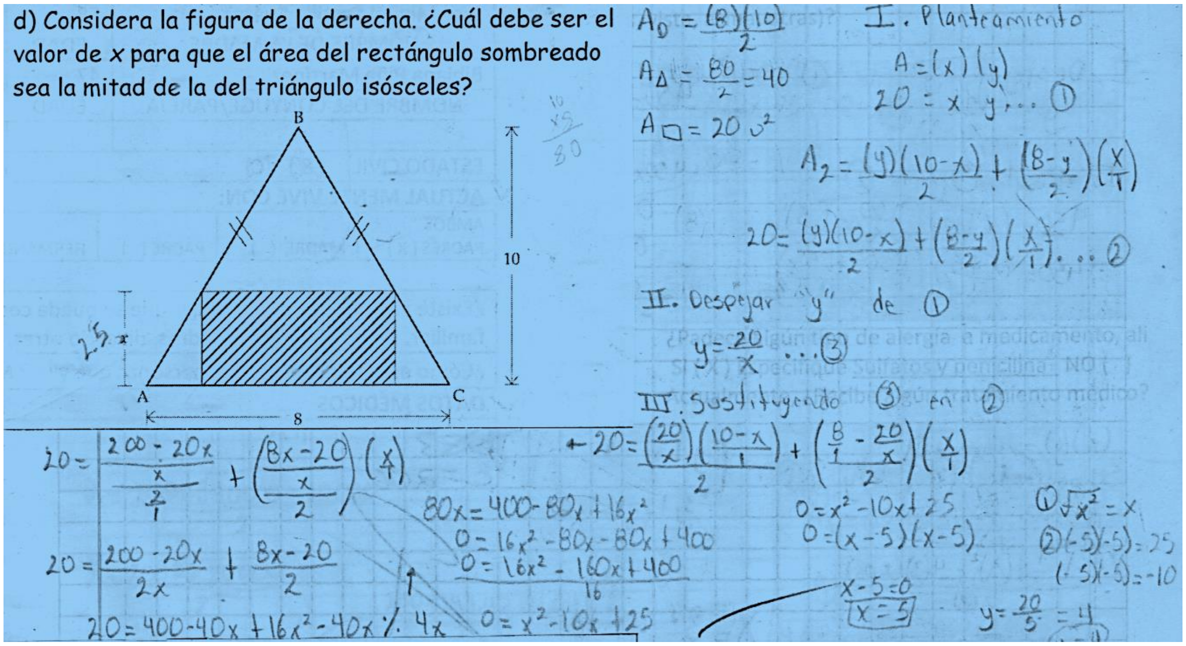

Imagen 3. Ejemplo de problema que fue resuelto en forma grupal.

En la imagen 4 se muestra el procedimiento utilizado por uno de los equipos, quienes formularon de modo correcto el planteamiento del problema pero en cuyo procedimiento de resolución se puede identificar el error procedimental referido al uso adecuado de las propiedades de la igualdad; en particular, omitieron aplicar el inverso aditivo al despejar la unidad de la variable “y” en la ecuación 2.

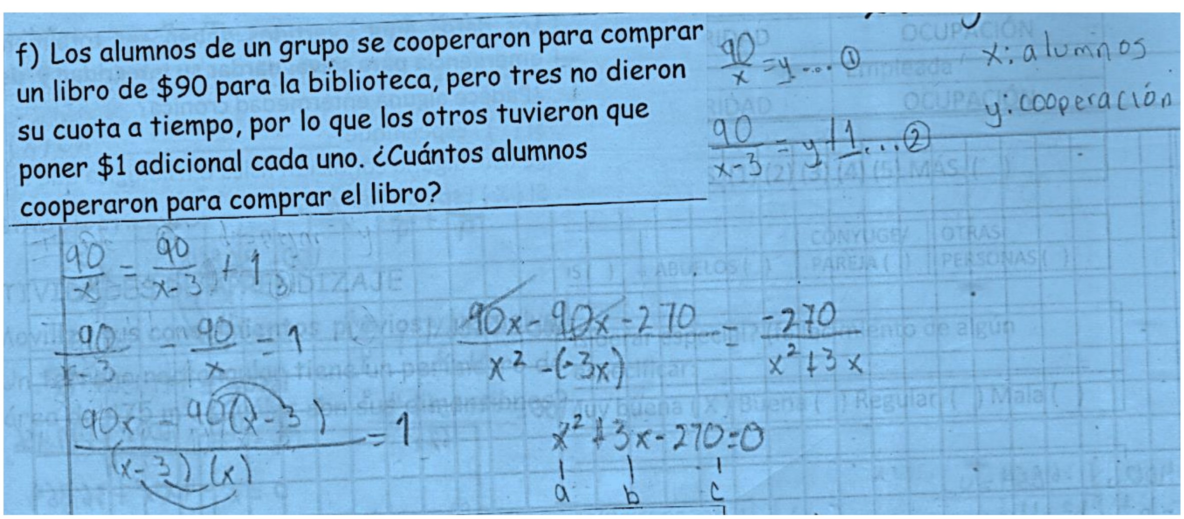

Imagen 4. Ejemplo de problema resuelto por uno de los equipos.

A modo de conclusiones

De modo particular, se puso de manifiesto que los estudiantes tuvieron dificultades de comprensión relacionadas no sólo con los conceptos matemáticos implicados sino también con la capacidad de traducir en lenguaje algebraico los datos contenidos en cada uno de los problemas propuestos, más aun cuando el contexto del que se trató fue el de tipo geométrico, pues ya no sólo la deducción fue un impedimento sino también otras habilidades matemáticas como la imaginación espacial, la estimación, el cálculo mental y la medición. Así, cuando los estudiantes carecen de conocimientos previos y/o de escaso desarrollo de habilidades matemáticas, la comprensión de temas relacionados con el Cálculo Diferencial se promete difícil y más aún cuando sus actitudes hacia el aprendizaje no son las deseables. En estos casos, el docente se enfrenta ante la disyuntiva de iniciar con la enseñanza de antecedentes conceptuales y procedimentales, lo cual traerá como consecuencia que se reduzca el número de sesiones para los contenidos programados en la materia de Cálculo Diferencial o bien, proceder con el tratamiento directo de los contenidos del programa oficial.

Las circunstancias descritas impiden al docente desempeñarse de forma idónea conforme a las competencias docentes que enmarcan su práctica educativa y en consecuencia, su función de mediador del conocimiento se posterga, toda vez que la concepción pedagógica actual representa mayores responsabilidades y compromisos para el aprendizaje de los estudiantes.

Aquí lo que se propone es tratar temas selectos e incorporarlos de forma estratégica en el aula, cuya finalidad es que en la medida de lo posible y de modo gradual, se pueda aminorar el rezago educativo de los alumnos. De hecho, la resolución de problemas sobre ecuaciones cuadráticas permite tratar otros contenidos matemáticos como los correspondientes a la Geometría e incluso, de otras disciplinas como la Física, pues se pueden resolver problemas relacionados con la velocidad de un móvil.

Referencias

Cruz, E. (2008). *Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática* (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México. Recuperada de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Eggen, P. D., & Kauchak, D. P. (2005). *Estrategias docentes. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento*. México: FCE.

Martínez, M. (2008). *Epistemología y metodología cualitativa en las ciencias sociales*. México: Trillas.

Perkins, D. (1997). *La escuela inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*. España: Gedisa.

Posadas, P. (2013). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3º de educación secundaria obligatoria* (Trabajo final de

Master no publicado). Universidad de Granada, España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/

Secretaría de Educación del Gobierno del Estado de México (2008). *Programa de Estudios de la Materia de Cálculo Diferencial, quinto semestre. Bachillerato General del Gobierno del Estado de México*. Estado de México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2001). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2008a). *Acuerdo 444 por el que se establecen las competencias disciplinares extendidas del Bachillerato General*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2008b). *Acuerdo 447 por el que se establecen las competencias docentes para quienes imparten educación media superior en la modalidad escolarizada*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2009). *Acuerdo 486 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato*. México: Autor.

Woods, P. (1998). *La escuela por dentro. La Etnografía en la investigación educativa*. España: Paidós.